MATIÈRE A OPTION

Mathématiques

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

PARTIE I

On considère la série entière (S) d'une variable réelle x, dont le premier terme est $u_0 = 1$ et dont le terme général est $u_n = (-1)^n a_n x^n$, avec :

$$a_n = \frac{1.2.3 \ldots n}{3.5.7 \ldots (2n+1)} = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+1)!}.$$

1° Trouver son rayon de convergence R. Pour $|x| < R$, on désigne par $f(x)$ la somme de la série.

2° On admet sans démonstration la formule dite de Stirling :

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}(1+\varepsilon_n),$$

où ε_n désigne le terme général d'une suite admettant la limite zéro lorsque $n \to +\infty$.

En utilisant la formule précédente, étudier la nature de la série (S) pour $x = -R$.

On suppose maintenant $x = R$. Étudier la nature de la série de terme général $v_p = u_{2p} + u_{2p+1}$, en déduire la nature de la série (S).

3° Calculer pour $x = 1$ les valeurs décimales approchées à 10^{-4} près par défaut des nombres u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$; en déduire des valeurs approchées de

$$A = \sum_{n=0}^{n=5} u_n \quad \text{et de} \quad B = \sum_{n=0}^{n=5} |u_n|$$

et indiquer la précision des valeurs approchées ainsi obtenues de $f(1)$ et de $f(-1)$.

.../...

4° Soit (S') la série déduite de la série (S) par dérivation terme à terme. Étudier sa nature pour x réel.

Soit (Σ) une série entière dont la série dérivée terme à terme est (S). Étudier, pour x réel, la nature de (Σ).

Partie II

1° On considère l'équation différentielle :

(E) $$x(x+2)\,y' + (x+1)\,y = 1$$

Démontrer que, si x appartient à l'intervalle $]-2, +2[$ la fonction f en est solution.

Est-ce la seule solution de (E) qui soit la somme d'une série entière?

2° On se propose d'intégrer l'équation (E) dans l'intervalle $I =]-2, 0[$.

Démontrer que les conditions :

$$-2 < x < 0, \qquad 0 < u < \pi, \qquad x + 1 = \cos u,$$

définissent une relation bijective entre la variable x appartenant à I et la variable u appartenant à $I_1 =]0, \pi[$. Calculer $\frac{dx}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ en fonction de u et en déduire les solutions de l'équation différentielle (E) dans I. Les candidats devront donner d'abord l'expression de y en fonction de u et d'une constante arbitraire, puis en fonction de x et de la même constante.

3° On se propose d'intégrer (E) dans l'intervalle :

$$]0, +\infty[= J = \mathrm{R}_+^*$$

Démontrer que les conditions :

$$x > 0, \quad v > 0, \quad x + 1 = \frac{e^v + e^{-v}}{2},$$

établissent une relation bijective entre la variable x appartenant à J et la variable v appartenant à R_+^*. Calculer e^v et v en fonction de x, et, en fonction de v, les dérivées $\frac{dx}{dv}$ et $\frac{dv}{dx}$. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) dans J. (E) a-t-elle une solution dans $\overline{J} = [0, +\infty[$?

4° Déduire de ce qui précède que (E) admet dans $K =]-2, +\infty[$ une solution unique g qui coïncide avec f dans $]-2, +2[$. Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g''(0)$? Calculer des expressions de $f(-1)$ et de $f(1)$; vérifier à l'aide de celles-ci l'exactitude des résultats numériques trouvés en I-3°.

5° Calculer, en fonction de u dans I et de v dans J, des expressions de $g'(x)$ et de $g''(x)$. Étudier le signe des expressions trouvées.

6° Calculer les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut des six nombres $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, $g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $g(1)$, $g'(1)$, $g(2)$, $g'(2)$.

7° Tracer la courbe représentative des variations de g, sur papier millimétré, en utilisant les résultats théoriques et numériques obtenus ci-dessus, les unités étant les suivantes :

50 millimètres sur Ox;

100 millimètres sur Oy.

Partie III

1° On pose $g_1(x) = \frac{d}{dx}[xg(x^2)]$, $\quad g_2(x) = \frac{d}{dx}[xg(-x^2)]$.

Trouver les développements en série entière de g_1 et de g_2. Indiquer leur rayon de convergence R_1. Quelle est la nature des séries obtenues pour $|x| = \mathrm{R}_1$?

2° On pose :

$$\mathrm{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \mathrm{D} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Justifier la convergence des deux séries définies ci-dessus.

Calculer d'abord des expressions de C et D à l'aide de certains des nombres évalués à la question II. 6°.

Calculer à l'aide du résultat précédent une valeur décimale approchée de C, la précision demandée pour ce calcul étant celle permise par l'emploi des tables de logarithmes à cinq décimales.

Calculer enfin à 10^{-6} près par défaut des valeurs décimales approchées des dix premiers termes de la série C et comparer leur somme à la valeur approchée de C trouvée ci-dessus.

Il pourra pour cela être avantageux de procéder comme suit : poser $t_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\quad t'_n = \frac{1}{t_n}$ et chercher une relation simple entre t'_{n+1} et t'_n permettant un calcul aisé de t'_n pour $1 \leqslant n \leqslant 9$. On observera que les nombres t'_n sont tous entiers. Les candidats qui en auront le temps pourront indiquer une justification très simple de ce résultat.

-FIN-

M 172

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail